

weit entfernt wie das gesehene Schwarz vom physikalischen Schwarz. Aber wir brauchen nur an den historischen GOETHE-NEWTON-Streit zu denken, um zu wissen, wie notwendig die strenge sprachliche Säuberung, die scharfe begriffliche Sonderung des «weißen Lichts» in weißwirkende Strahlung und Weißempfindung ist. Ebenso ist das «ideale Schwarz» der Physik eine völlige Abwesenheit von Strahlung, die Schwarzempfindung aber, untrennbar mit der Weißempfindung verbunden und als ihr antagonistischer Partner im Sinne der reziproken Innervation in Schwarzneuronen der Sehrinde vertreten, ist, obgleich ihr physikalisch kein äußeres Agens entspricht, eine kräftige positive, wirkungsvolle und unentbehrliche Farbe.

So münden auch unsere kleinen FarbfILTERversuche in große allgemeine Fragen aus, und es sei unvergessen, daß einstmals dem Altmeister der Farbenbeobachtung ein PURKINJÉ seine *Beiträge zur Kenntnis des Sehens in subjektiver Hinsicht* widmete, ein JOHANNES MÜLLER seine optischen Schriften überreichte.

Summary

A green-blue filter placed before the eye produces red-green colour blindness, a purple filter a green-red colour-blindness, an orange filter a blue-yellow colour-blindness. These artificial absorptive visual defects have great similarity with the naturally occurring forms of colour-blindness (proto-, deuterio-, tritanopy and anomaly and display typical confusions of colours, exaggeration of brightness differences and of simultaneous contrasts, and great dependence of the chromatic impression upon strength of illumination and size of field. The similarity is based on the fact that the filter cuts out approximately that range of colour for the normal eye for which the colour-blind eye possesses no photochemical receptor in the retina. The simple experiments, which can be demonstrated not only by placing a colour filter before the eye, but also by means of coloured illumination produced in a dark room, permit us to understand why an absorptive or receptive visual defect never results in red-blindness or green-blindness alone, because the general chromatic tone of the visual field is confused with white, and enable persons with normal colour vision to feel how the colour-blind see colour. The experiments are related to the general theory of colour vision with special reference to the photochemical data on sensitizing pigments decomposed by light and to central nervous regulation (antagonistic effects in reciprocal innervation).

Brèves communications - Kurze Mitteilungen Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. - Für die kurzen Mitteilungen ist ausschließlich der Autor verantwortlich. - Per le brevi comunicazioni è responsabile solo l'autore. - The editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

Les développantes généralisées du second ordre d'une courbe plane

Nous considérons une courbe plane (M): $x(t)$, $y(t)$ à laquelle nous associons la courbe-adjointe (L): $F(t)$, $G(t)$; la paramétrisation est la même pour les deux courbes. Sur la tangente en M à (M) on porte le segment $\overline{MN} = \tau(t)$, d'où une courbe (N) dite *développante généralisée ordinaire*; sur la tangente en N à cette dernière, on porte $\overline{NP} = \chi(t)$ d'où une courbe (P) dont la tangente doit passer par le point L correspondant de la courbe-adjointe. La courbe (P) ainsi engendrée est alors appelée *développante généralisée du second ordre* de la courbe-base (M). Nous désignons par σ l'élément d'arc de la courbe-base, par σ_1 l'élément d'arc de la développante (N) et nous utilisons les notations

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{dM}}{d\sigma}, \quad \cos \beta = \frac{\overrightarrow{dN}}{d\sigma_0}, \quad \text{avec } \sigma_1^2 = \alpha'^2 \tau^2 + (\sigma' + \tau')^2.$$

D'autre part, il nous faut introduire les quantités vectorielles suivantes

$$\omega_1 = \overrightarrow{ML} \wedge \frac{\overrightarrow{dM}}{d\sigma} \cdot \sigma'; \quad \omega_2 = \overrightarrow{ML} \wedge \frac{\overrightarrow{d^2M}}{d\sigma^2} \cdot \frac{\sigma'^2}{\alpha'}.$$

La mise en équation du problème géométrique précédemment défini conduit à l'équation

$$(1) \quad A(\chi' + \sigma'_1) + \beta' \chi(B - \sigma'_1 \chi) = 0 \quad \text{avec}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} A &\equiv \omega_1(\tau' + \sigma') - \alpha' \tau(\sigma' \tau - \omega_2) \\ B &\equiv (\omega_2 - \sigma' \tau)(\tau' + \sigma') - \omega_1 \alpha' \tau. \end{aligned}$$

Remarquons que nous avons, dans des études antérieures¹, signalé:

1) le cas $A = 0$ qui donne une *équation de RICCATI* en $\tau(t)$ la tangente à la développante (N) passe par L et nous avons, en outre

$$\chi = 0 \quad \text{et} \quad \chi = -\frac{\omega_1}{\alpha' \tau} \sigma'_1$$

2) le cas $B = 0$ qui fournit une *équation du type ABEL* en $\tau(t)$; la normale à la développante (N) passe par le point L .

Ce qu'il y a de remarquable dans le problème général c'est que, connaissant la fonction $\tau(t)$ c'est-à-dire une

¹ G. VIGUIER, Ann. Fac. Sci. Toulouse 59, fasc. 9, 1 (1945); C. R. Acad. Sci. Paris 227, N° 21-22, nov. 1948.

développante (N), la détermination de la développante (P) se ramène à l'étude de l'équation de RICCATI(1). On n'a donc pas une seule courbe (P) mais toute une famille de courbes projectivement égales parce que dépendant homographiquement d'une même constante d'intégration.

Si maintenant nous envisageons le cas particulier $\chi(t) = -\sigma_1(t)$, c'est-à-dire celui où la développante généralisée (P) se réduit à une développante classique de la courbe (N), l'équation (1) se ramène à la forme

$$(3) \quad B\sigma_1'' - \sigma_1(B' + \sigma_1'^2) = 0,$$

équation différentielle du second ordre en $\tau(t)$ qui fournit la développante (N) associée à la courbe-base (M). Comme autre cas particulier, signalons celui pour lequel la normale en N à la courbe (N) passe par le point L . Reprenant les relations (2), la condition $B = 0$ s'écrit

$$(4) \quad \tau' + \sigma' = \frac{\omega_1 \alpha' \tau}{\omega_2 - \sigma' \tau}.$$

Nous utilisons la notation

$$(5) \quad \lambda^2 = \omega_1^2 + (\omega_2 - \sigma' \tau)^2 \text{ soit } \overline{NL}^2 = \left(\frac{\lambda}{\sigma'}\right)^2.$$

La développante (P) est alors déterminée par l'équation de RICCATI réduite

$$(6) \quad \chi' - \frac{\beta'}{\lambda} \chi^2 + \sigma_1' = 0,$$

équation que nous avons déjà rencontrée dans une précédente étude.

Il est intéressant de la rapprocher de la forme réduite de M. ELIE CARTAN¹

$$(7) \quad \chi' + P\chi^2 + 1 = 0.$$

Nous avons

$$(8) \quad \sigma_1' = 1, \quad P = -\frac{\sigma_1'}{\varrho_1 \lambda}, \quad \varrho_1 = \frac{\sigma_1'}{\beta'}.$$

Ainsi pour deux développantes (N) à paramétrisation isométrique, nous obtenons, entre les distances $\overline{NL}$ et $\overline{N^*L^*}$ correspondantes la relation

$$(9) \quad \frac{\overline{NL}}{\overline{N^*L^*}} = \frac{\varrho_1^*}{\varrho_1} \cdot \frac{\sigma'^*}{\sigma'}; \quad (\sigma_1' = \sigma_1'^* = 1).$$

GABRIEL VIGUIER

Institut H. Poincaré, Paris, le 30 septembre 1949.

Summary

From an absolutely arbitrary plane curve, particular involutes are drawn the study of which is reduced to that of a differential equation of the second order. As a particular case, ABEL's equation is derived again, also RICCATI's equation with the reduced form of E. CARTAN.

¹ E. CARTAN, *Théorie des espaces à connexion projective* (Gauthier Villars, Paris 1937).

A Two-Liquid Phase Distribution Method for the Separation of Metallic Elements¹

In view of recent publications² describing the separation of certain elements by solvent distribution methods involving chelation it seems desirable to record the general principles of such a method which were evolved some years ago. The method depends upon the formation of unionized chelate compounds by the elements with certain organic reagents and the small solubility of these compounds in water compared to their solubility in water-immiscible organic solvents³. The overall equilibrium involved in the transfer of the element between the aqueous phase and the organic phase may be represented by the following equation⁴:



where Me^{+n} represents the metal ion of oxidation number n ; KeH represents the organic chelating group; MeKe_n represents the metal chelate; (w) represents the water phase; and (o) represents the organic phase.

One may define an equilibrium constant, K_{Me} , for a given element, Me, with a particular organic system as follows:

$$K = \frac{[\text{MeKe}_n(\text{o})]}{[\text{Me}^{+n}(\text{w})]} \cdot \frac{[\text{H}^+(\text{w})]}{[\text{KeH}(\text{o})]} = D_{\text{Me}} \left(\frac{\text{o}}{\text{w}}\right) \frac{[\text{H}^+(\text{w})]^n}{[\text{KeH}(\text{o})]^n} \quad (2)$$

where $D_{\text{Me}} \left(\frac{\text{o}}{\text{w}}\right)$ represents the distribution ration for the element expressed as the total concentration of the element in the organic phase divided by the total concentration of the element in the water phase.

Thus, for any given element, Me, with a particular organic system, the distribution coefficient is given by equation 3:

$$D_{\text{Me}} \left(\frac{\text{o}}{\text{w}}\right) = K_{\text{Me}} \frac{[\text{KeH}(\text{o})]^n}{[\text{H}^+(\text{w})]^n} \quad (3)$$

Since the value of K_{Me} is different for each element⁵ it is clear how such a system may be used for the separation of the elements.

It should be pointed out that equation 1 is only an approximation and represents the resultant of several independent equilibria. An examination of these equilibria will reveal the various factors which determine the design and choice of the chelating agent, represented by KeH . The equilibrium 1 thus consists of the sum of the four following equilibria:

¹ Manhattan Project Report CN-2186, December 19, 1944.

² E. ABRAHAMCZIK, *Angew. Chemie* **61**, 98 (1949). – H. GÖTTE, *Z. Naturforsch.* **1**, 377 (1946). – B. G. HARVEY, G. HEAL, A. G. MADDOCK, and E. I. ROWLEY, *J. Chem. Soc.* **1947**, 1010 (London).

³ Solvent extraction methods with or without complexing agents have been in use in an empirical way in analytical chemistry for some time. See WICHMAN, *Ind. Eng. Chem. Anal. Ed.* **11**, 66 (1939) and T. MOELLER, *Ind. Eng. Chem. Anal. Ed.* **15**, 270, 246 (1943).

⁴ The following formulation appears to be a generalization of the specific quantitative formulation for the solvent extraction of zinc using dithizone given by KOLTHOFF and SANDELL (*J. Amer. Chem. Soc.* **63**, 1906 (1941)).

⁵ M. CALVIN and K. WILSON, *J. Amer. Chem. Soc.* **67**, 2003 (1945). – M. CALVIN and R. H. BAILES, *J. Amer. Chem. Soc.* **68**, 949 (1946). – R. B. DUFFIELD and M. CALVIN, *J. Amer. Chem. Soc.* **68**, 557 (1946). – M. CALVIN and N. C. MELCHIOR, *J. Amer. Chem. Soc.* **70**, 3270 (1948); *J. Amer. Chem. Soc.* **70**, 3273 (1948).